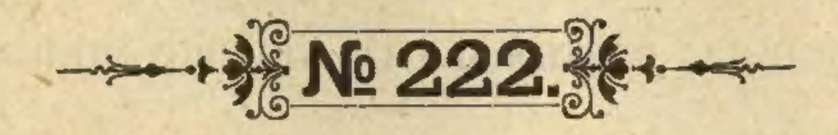
XIX Сем. 10-го октября 1895 г. № 6.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



СОХРАНЕНIЕ и ПРЕВРАТИМОСТЬ ЭНЕРГIИ.

(Продолженiе).*

VI. Энергiя электрическихъ зарядовъ.

§ 71. Если единица положительнаго электричества перемѣщается изъ данной точки B поля, образуемаго зарядомъ A, за границу поля, то электрическая сила, дѣйствующая между зарядомъ A и массой $+1$, производитъ работу, равную потенцiалу точки B, положимъ v. Если бы въ точкѣ B было q единицъ электричества, то при перемѣщенiи каждой единицы электрическая сила произвела бы работу v, а при перемѣщенiи всѣхъ q единицъ—работу qv. Эта величина qv представляетъ такимъ образомъ полную работу, которую способна произвести сила взаимодѣйствiя между зарядомъ A и q единицами, помѣщенными въ точкѣ B, или взаимную энергiю этихъ двухъ зарядовъ.

§ 72. Электрическiя силы дѣйствуютъ не только между однимъ зарядомъ и другимъ, но и между частицами одного и того же заряда и вызываютъ въ немъ стремленiе къ разсѣянiю. Поэтому, когда какой либо зарядъ разсѣевается, то электрическiя силы, дѣйствующiя между его частицами, производятъ положительную работу. Эта работа пред-

*) См. „В. О. Ф.“ №№ 217, 218, 219, 220 и 221.

ставляетъ уже собственную энергію заряда. Найдемъ, какъ измѣряется собственная энергія заряда.

Положимъ, что проводникъ A содержитъ зарядъ M и потенціалъ его v. Будемъ постепенно разряжать проводникъ A, прикасаясь къ нему шарикомъ, который беретъ каждый разъ $+1$, и отводя затѣмъ эту $+1$ къ землѣ. Потенціалъ на проводникѣ A будетъ уменьшаться пропорціонально уменьшенію заряда, и слѣдовательно работа перемѣщенія $+1$ въ землю будетъ съ каждымъ разомъ все меньше. Когда зарядъ уменьшится вдвое, то и потенціалъ уменьшится вдвое и будетъ равенъ $v/_2$. Работа электрической силы при перемѣщеніи $+1$ съ потенціала $v/_2$ до 0 равна $v/_2$. Каждой единицѣ электричества, взятой съ проводника A при потенціалѣ, бо̀льшемъ $v/_2$ на величину P, будетъ соотвѣтствовать единица, взятая послѣ при потенціалѣ, меньшемъ $\frac{v}{2}$ на ту же величину P. Первая работа равна $\frac{v}{2}+P$, вторая $\frac{v}{2}-P$, сумма ихъ $\frac{v}{2}+P+\frac{v}{2}-P=2\,\frac{v}{2}\cdot$ Слѣдовательно, въ общемъ работа произведена такая, какъ если бы обѣ единицы были взяты при потенціалѣ $v/_2$. Весь зарядъ M можно разбить на такія пары единицъ. Поэтому работа электрическихъ силъ при разсѣяніи всего заряда M будетъ такая же, какъ если бы весь онъ былъ взятъ съ проводника при потенціалѣ $v/_2$, т. е. равна $\frac{Mv}{2}\cdot$ Величиной $\frac{Mv}{2}$ измѣряется, слѣдовательно, собственная энергія заряда.

§ 73. Положимъ, что два заряда, которыхъ массы M и M_1, находятся одинъ въ полѣ дѣйствія другого въ двухъ точкахъ A и B. Опредѣлимъ всю работу, которую способны произвести электрическія силы, пока оба заряда не разсѣются. Мы можемъ представить себѣ этотъ процессъ разсѣянія различными способами: 1) Зарядъ M остается неподвижнымъ, а M_1 удаляется за черту поля дѣйствія заряда M; потомъ оба разсѣеваются. 2) Зарядъ M остается неподвижнымъ, а зарядъ M_1 разсѣевается за черту поля, потомъ зарядъ M разсѣевается. 3) и 4) роли зарядовъ M и M_1 мѣняются. Разсмотрѣніе всѣхъ четырехъ случаевъ привело бы насъ къ одному и тому же результату: вся возможная работа, или *полная энергія обоихъ зарядовъ равна суммѣ собственныхъ энергій того и другого заряда и ихъ взаимной энергіи.*

Разсмотримъ для примѣра 1-й и 4-й процессы:

Положимъ, что заряды M и M_1 собраны на проводникахъ A и B. Зарядъ M образуетъ на проводникѣ A потенціалъ v_1 а на проводникѣ B—потенціалъ v'; зарядъ M_1, расположенный на проводникѣ B, образуетъ на немъ потенціалъ v'_1, а на проводникѣ A—потенціалъ v_1. Потенціалъ проводника A будетъ $v+v_1$, проводника B—$v'+v'_1$ (§ 63,7).

1-й случай. Такъ какъ потенціалъ, производимый зарядомъ M на проводникѣ B, равенъ v', то, при удаленіи проводника B съ зарядомъ M_1 за границу поля дѣйствія заряда M, производится работа M_1v' (§ 71). Когда проводникъ B удалится, потенціалъ на немъ будетъ v'_1, а на проводникѣ A будетъ потенціалъ v. При разсѣяніи за-

ряда M электрическія силы произведутъ работу $\frac{Mv}{2}$, при разсѣяніи заряда M_1 — $\frac{M_1 v'_1}{2}$. Вся работа электрическихъ силъ равна суммѣ этихъ работъ. Называя полную энергію обоихъ зарядовъ буквой E, получимъ:

$$E = M_1 v' + \frac{Mv}{2} + \frac{M_1 v'_1}{2}.$$

4-*й случай*. Весь процессъ состоитъ изъ двухъ частей: *a*) зарядъ M_1 остается на мѣстѣ, а зарядъ M—разсѣевается, *b*) зарядъ M_1 разсѣевается. *a*) Во время разсѣеванія заряда M потенціалъ проводника A все время убываетъ отъ величины $v + v_1$ до v_1. Первыя частицы уносятся при потенціалѣ $v + v_1$, послѣдняя—при потенціалѣ v_1. На основаніи разсужденія въ § 72 мы можемъ заключить, что работа будетъ произведена такая же, какъ если бы весь зарядъ былъ унесенъ при потенціалѣ, среднемъ между $v + v_1$ и v_1, т. е. при потенціалѣ $v_1 + v/_2$ и равна слѣдовательно $M\left(v_1 + \frac{v}{2}\right)$. *b*) Когда зарядъ M разсѣялся, потенціалъ проводника B сталъ равенъ v'_1. Разсѣяніе заряда M_1 вызываетъ работу, равную $\frac{M_1 v'_1}{2}$. Вся произведенная работа равна суммѣ этихъ работъ: $Mv_1 + \frac{Mv}{2} + \frac{M_1 v'_1}{2}$.

Это выраженіе отличается отъ полученнаго въ 1 случаѣ членами Mv_1 и $M_1 v'$. Не трудно доказать, что они равны.

Обозначимъ буквой P потенціалъ на проводникѣ B, который производится единицей электричества, помѣщенной на проводникѣ A. Такой же потенціалъ P произведетъ на проводникѣ A единица электричества, помѣщенная на проводникѣ B (это тѣмъ болѣе точно, чѣмъ меньше размѣры проводниковъ A и B сравнительно съ разстояніемъ между ними).

Если одна единица, помѣщенная на проводникѣ A, производитъ на проводникѣ B потенціалъ P, то M единицъ, помѣщенныхъ на A, произведутъ на B потенціалъ MP (§ 63,8). Слѣдовательно $v' = MP$. На томъ же основаніи $v_1 = M_1 P$. Слѣдовательно $M_1 v' = MM_1 P = Mv_1$, ч. и т. д.

V. Происхожденіе и превращенія электрической энергіи.

§ 74. Когда мы прижимаемъ кожу къ стеклу, на стеклѣ появляется положительный зарядъ, на кожѣ — отрицательный. Передвигая кожу по стеклу, мы удаляемъ одинъ зарядъ отъ другого и преодолѣваемъ сопротивленіе притяженія между ними. Эта часть работы внѣшней силы, которая идетъ на преодолѣваніе электрической силы, и служитъ источникомъ электрической энергіи. Остальная часть работы внѣшней силы идетъ на преодолѣваніе тренія и превращается въ теплоту. Когда мы проводимъ кожей не въ 1-й разъ, а во 2-й, 3-й и

т. д., то съ каждымъ разомъ зарядъ усиливается и, слѣдовательно, мы всегда ведемъ кожу отъ мѣстъ стекла, болѣе заряженныхъ, т. е. съ большимъ потенціаломъ, къ мѣстамъ съ меньшимъ потенціаломъ; а такъ какъ отрицательное электричество кожи стремится въ противоположную сторону, то электрическая сила производитъ отрицательную работу, и энергія ея возрастаетъ на счетъ работы внѣшней силы, передвигающей кожу.

§ 75. Когда мы имѣемъ зарядъ А, положимъ положительный, то, поднося къ нему проводникъ, прикасаясь къ послѣднему рукой и затѣмъ относя его, мы можемъ безпредѣльно получать все новыя и новыя количества отрицательнаго электричества безъ того, чтобы зарядъ А уменьшился. Повидимому данный зарядъ А, нисколько не уменьшаясь, можетъ служить источникомъ безконечнаго количества электрической энергіи. Но это противорѣчило бы закону сохраненія энергіи, и не трудно доказать, что дѣйствительнымъ источникомъ возникающей электрической энергіи служитъ здѣсь не энергія заряда А, а работа внѣшней силы, перемѣщающей проводникъ при противодѣйствіи электрическихъ силъ.

Чтобы упростить разсужденіе, предположимъ, что проводникъ В (фиг. 29) во все время приближенія къ заряду А соединенъ съ землей. Обозначимъ массу образующагося на проводникѣ В заряда черезъ —М, потенціалъ точки В, образуемый зарядомъ А,—буквой v, потенціалъ той же точки, образуемый зарядомъ —М, черезъ —Р. При передвиженіи проводника до точки В электрическія силы, дѣйствующія между зарядами А и —М производятъ работу Mv. Электрическія силы, дѣйствующія между частицами образующагося постепенно заряда —М, производятъ отрицательную работу $-\frac{MP}{2}$; вся работа электрическихъ силъ равна $Mv-\frac{MP}{2}\cdot$ При удаленіи проводника В съ зарядомъ —М, который на немъ сохраняется, электрическія силы, дѣйствующія между зарядами А и —М, производятъ отрицательную работу $-Mv$. Силы, дѣйствующія между частицами заряда —М, не производятъ работы, такъ какъ зарядъ остается на проводникѣ *). Слѣдовательно работа электрическихъ силъ во время всего процесса равна

$$Mv-\frac{MP}{2}-Mv=-\frac{MP}{2}\cdot$$

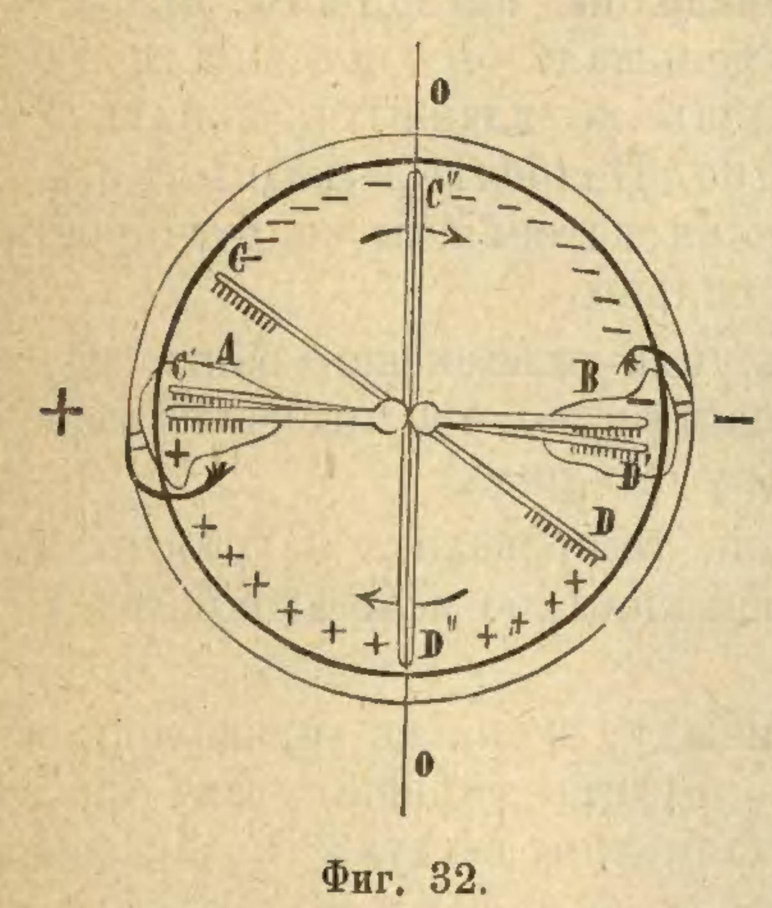
Слѣдовательно электрическія силы произвели въ общемъ отрицательную работу $-\frac{MP}{2}\cdot$ Равную положительную работу произвела внѣшняя сила,

*) Точнѣе говоря, производятъ незначительную положительную работу при разсѣяніи заряда по всему проводнику, тогда какъ раньше онъ былъ собранъ на сторонѣ, обращенной къ А. Тогда и потенціалъ, который окажется на проводникѣ В послѣ удаленія изъ поля, будетъ уже не Р, а нѣсколько меньшій $P' < P$. Энергія заряда $\frac{MP'}{2} < \frac{MP}{2}$, работы внѣшней силы. Разница $\frac{MP}{2}-\frac{MP'}{2}$ превратится въ теплоту при движеніи электричества по проводнику В.

двигавшая проводникъ. Потенціалъ на проводникѣ B, по удаленіи его изъ поля, равенъ —P, слѣдовательно, энергія заряда —M равна $\frac{MP}{2}$. Слѣдовательно здѣсь работа внѣшней силы превратилась въ электрическую энергію заряда.

Въ обыкновенной электрической машинѣ заряженный секторъ стекляннаго круга движется всегда отъ подушки, гдѣ потенціалъ равенъ нулю, къ кондуктору машины, гдѣ потенціалъ положителенъ. Слѣд. внѣшняя сила производитъ здѣсь положительную работу, преодолѣвая сопротивленіе электрическихъ силъ. Работа внѣшней силы превращается въ электрическую энергію.

§ 76. *Машина Гольца.* Пусть въ машинѣ Гольца (фиг. 32) обкладка A заряжена положительно, B—отрицательно. Потенціалъ въ лѣвой части поля будетъ положителенъ, въ правой—отрицателенъ; эти двѣ части раздѣляются поверхностью нулевого потенціала. Если кондукторы соединены, электричество на нихъ будетъ разлагаться и перетекать положительное вправо, отрицательное влѣво. Тамъ они стекаютъ съ остріевъ на подвижной кругъ и заряжаютъ его. Кругъ вращается, какъ указано стрѣлками, и несетъ положительное электричество справа налѣво, отрицательное — наоборотъ, т. е. и то, и другое вопреки дѣйствію электрическихъ силъ. Внѣшняя сила, вращающая кругъ, производитъ положительную работу, которая превращается въ электрическую энергію. И дѣйствительно, заряженныя части подвижного круга проходятъ подъ щетками и такимъ образомъ какъ бы вводятся внутрь проводника, образуемаго щеткой, поддерживающимъ ее стержнемъ и обкладкой, и передаютъ ему свое электричество, которое переходитъ на поверхность проводника, т. е. на стержень и обкладку. Такимъ образомъ абсолютныя величины зарядовъ, а, слѣдовательно, и потенціаловъ на обкладкахъ возрастаютъ; возрастаетъ и электрическая энергія обоихъ зарядовъ на счетъ работы внѣшней силы. Потенціалъ на соединенномъ кондукторѣ остается почти равнымъ нулю (онъ немного больше нуля въ лѣвой части и немного меньше въ правой; если бы этого не было, разложеніе прекратилось бы). Когда разведемъ кондукторы, потенціалъ на правой части убываетъ, на лѣвой возрастаетъ; на шарикахъ собираются электричества: на правомъ—отрицательное, на лѣвомъ—положительное. Вмѣстѣ съ тѣмъ индуктивное дѣйствіе на кондукторы значительно уменьшается и тѣмъ больше, чѣмъ больше раздвигаютъ кондукторы. Это легко сообразить по чертежу 29, представляющему общую схему индукціи. Индуктивное дѣйствіе зависитъ отъ разности B_2B_1 потенціаловъ, образуемыхъ на концахъ введеннаго проводника B зарядомъ A. Если бы проводникъ B укоротить вдвое, втрое и т. д., то и разность B_2B_1, а съ нею и индуктивное дѣйствіе уменьшились бы. Итакъ, при раздвиганіи шариковъ,



Фиг. 32.

разность между потенціалами на нихъ возрастаетъ, но индуктивное дѣйствіе на нихъ зарядовъ, собранныхъ на обкладкахъ, уменьшается, притокъ зарядовъ на обкладки уменьшается, и дѣйствіе машины ослабѣваетъ. Для предупрежденія этого служитъ діаметральный кондукторъ, который при раздвиганіи шариковъ начинаетъ играть ту же роль, какую раньше играли соединенные главные кондукторы. Индуктивное дѣйствіе на него зарядовъ, собранныхъ на обкладкахъ, тѣмъ сильнѣе, чѣмъ больше разность потенціаловъ въ тѣхъ точкахъ поля, въ которыхъ лежатъ концы его, т. е. острія. Чѣмъ круче мы его поставимъ, тѣмъ индуктивное дѣйствіе будетъ слабѣе. Въ положеніи $C''D''$ оно равно нулю. Всего сильнѣе оно было бы въ положеніи $C'D'$, или совсѣмъ горизонтальномъ. Но тогда положительное электричество на немъ и на подвижномъ кругѣ около D' увеличивало бы потенціалъ праваго кондуктора, а отрицательное около C' уменьшало бы потенціалъ лѣваго. Такимъ образомъ разность потенціаловъ на главныхъ кондукторахъ уменьшалась бы Это опять не выгодно. Наиболѣе выгоднымъ оказывается наклонъ около 30^0, когда вліяніе на потенціалы кондукторовъ мало, а индуктивное дѣйствіе достаточно сильно.

§ 77. Когда заряженный проводникъ, или лейденская банка разряжаются, то электрическая энергія исчезаетъ, но при этомъ появляются эквивалентныя количества энергіи другого рода.

a) Если разряжаемъ банку проволокой, то проволока нагрѣвается, и на ней развивается количество тепла, эквивалентное исчезающей электрической энергіи.

b) Если даемъ перескочить искрѣ между концомъ проволоки и шарикомъ банки, то нагрѣваніе проволоки будетъ меньше, такъ какъ часть электрической энергіи идетъ на накаливаніе воздуха и звуковое колебаніе (трескъ).

c) Если разряжаемъ проводникъ посредствомъ электрическаго колокольчика, то электрическая энергія превращается въ живую силу шариковъ и свѣтъ и теплоту перескакивающихъ искръ. Живая сила шариковъ превращается въ звукъ и теплоту.

I. Энергія гальваническаго тока.

I. Законы Вольты.

§ 78. Свойства совершеннаго проводника предполагаютъ отсутствіе какого либо взаимодѣйствія между его матеріальными частицами и находящимся на немъ электричествомъ. Но совершенныхъ проводниковъ въ природѣ не существуетъ, и всѣ проводники обнаруживаютъ свойства, которыя заставляютъ предполагать большее или меньше притяженіе между ихъ частицами и электричествомъ. Притомъ одни тѣла, повидимому, болѣе притягиваютъ положительное электричество, другія— отрицательное. Если проводникъ A, который болѣе притягиваетъ положительное электричество, привести въ соприкосновеніе съ проводникомъ B, который болѣе притягиваетъ отрицательное, то нейтральное электричество не будетъ на нихъ въ равновѣсіи: проводникъ A перетянетъ на себя излишекъ положительнаго электричества, а проводникъ

B—излишекъ отрицательнаго. Когда же взаимное притяженіе отдѣленныхъ электричествъ уравновѣситъ разность между притяженіями положительнаго и отрицательнаго электричествъ проводниками A и B, равновѣсіе вновь возстановится. Тогда во всѣхъ точкахъ проводника A будетъ одинаковый потенціалъ, то же на проводникѣ B, но на проводникѣ A потенціалъ будетъ больше, чѣмъ на B. Эта разность потенціаловъ на проводникахъ A и B зависитъ отъ разницы въ притяженіи проводниками A и B положительнаго и отрицательнаго электричествъ, а слѣд., отъ ихъ природы. Опытъ показываетъ, что она зависитъ также отъ температуры, но не зависитъ отъ другихъ условій: формы и величины проводниковъ, ни отъ абсолютной величины потенціала на обоихъ. Такъ, если спаять двѣ пластинки, цинковую и мѣдную, то на цинковой образуется большій потенціалъ, чѣмъ на мѣдной. Если будемъ измѣнять потенціалъ одной, на столько же измѣнится потенціалъ другой. Слѣдовательно всякій новый прибавочный зарядъ, положительный или отрицательный, повышаетъ потенціалы всѣхъ точекъ обоихъ проводниковъ на одну и ту же величину и, слѣд., распредѣляется на этомъ проводникѣ, какъ на однородномъ. Итакъ *при прикосновеніи двухъ разнородныхъ проводниковъ по обѣ стороны поверхности прикосновенія образуется разность потенціаловъ, зависящая отъ природы проводниковъ и температуры, но не зависящая ни отъ формы и величины ихъ, ни отъ абсолютной величины потенціаловъ.* Это *1-й законъ Вольты,* относящійся безразлично ко всѣмъ проводникамъ.

§ 79. *Всѣ проводники, при прикосновеніи которыхъ не происходитъ химическаго дѣйствія, можно расположить въ рядъ, такъ что каждый послѣдующій при прикосновеніи съ однимъ изъ предыдущихъ будетъ заряжаться положительно, а предыдущій—отрицательно и разность потенціаловъ при прикосновеніи любыхъ двухъ проводниковъ ряда равна суммѣ разностей потенціаловъ, возникающихъ при прикосновеніи въ послѣдовательномъ порядкѣ всѣхъ промежуточныхъ проводниковъ.* Это 2-й законъ Вольты. Таковъ рядъ:—уголь, платина, серебро, мѣдь, желѣзо, олово, свинецъ, цинкъ +. Разность потенціаловъ при прикосновеніи мѣди къ цинку равна суммѣ разностей потенціаловъ, возникающихъ при прикосновеніи мѣди къ желѣзу, желѣза къ олову, олова къ свинцу и свинца къ цинку.

§ 80. *Слѣдствія законовъ Вольты*: 1) Обозначимъ для краткости проводники Вольтова ряда буквами A, B, C, D... и будемъ обозначать разность потенціаловъ при прикосновеніи двухъ проводниковъ A и B, при переходѣ съ A на B, знакомъ $A|B$. $B|A$ будетъ обозначать измѣненіе потенціала при переходѣ съ B на A. Очевидно $A|B = -B|A$. Докажемъ на основаніи двухъ законовъ Вольты, что если составить цѣпь изъ любого числа проводниковъ Вольтова ряда въ любомъ порядкѣ и закончить цѣпь такимъ же проводникомъ, съ какого начали, то потенціалы на крайнихъ проводникахъ будутъ равны. Составимъ напр. цѣпь $BEACB_1$ (B_1—проводникъ, однородный съ B). Назовемъ потенціалы на B, E, A, C, B_1 соотвѣтственно черезъ P, P_1, P_2, P_3, P_4. Разность потенціаловъ при переходѣ съ B на E зависитъ только отъ природы ихъ и температуры и не зависитъ отъ того, слѣдуютъ ли за E еще другіе проводники, или нѣтъ. Послѣднее обстоятельство можетъ по-

вліять только на абсолютную величину потенціаловъ B и E, но не на разность между ними (1-й зак. Вольты). Далѣе, на основаніи 2-го закона Вольты получимъ: $B|E = B|C + C|D + D|E$. Слѣдовательно потенціалъ на E будетъ:

$$P_1 = P + B|E = P + B|C + C|D + D|E.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$P_2 = P_1 + E|A = P_1 - A|E = P_1 - (A|B + B|C + C|D + D|E) =$$

$$= P + B|C + C|D + D|E - A|B - B|C - C|D - D|E = P - A|B.$$

$$P_3 = P_2 + A|C = P_2 + A|B + B|C = P - A|B + A|B + B|C = P + B|C.$$

$$P_4 = P_3 + C|B = P_3 - B|C = P + B|C - B|C = P, \text{ ч. и т. д.}$$

2) Если теперь соединимъ между собой концы цѣпи B и B_1, то равновѣсіе электричества не нарушится, такъ какъ мы соединяемъ между собой два однородныхъ проводника, имѣющихъ одинаковый потенціалъ. Поэтому, если составить замкнутую цѣпь изъ любыхъ проводниковъ Вольтова ряда, то электричество на ней будетъ въ равновѣсіи, хотя каждая разнородная часть будетъ имѣть свой потенціалъ.

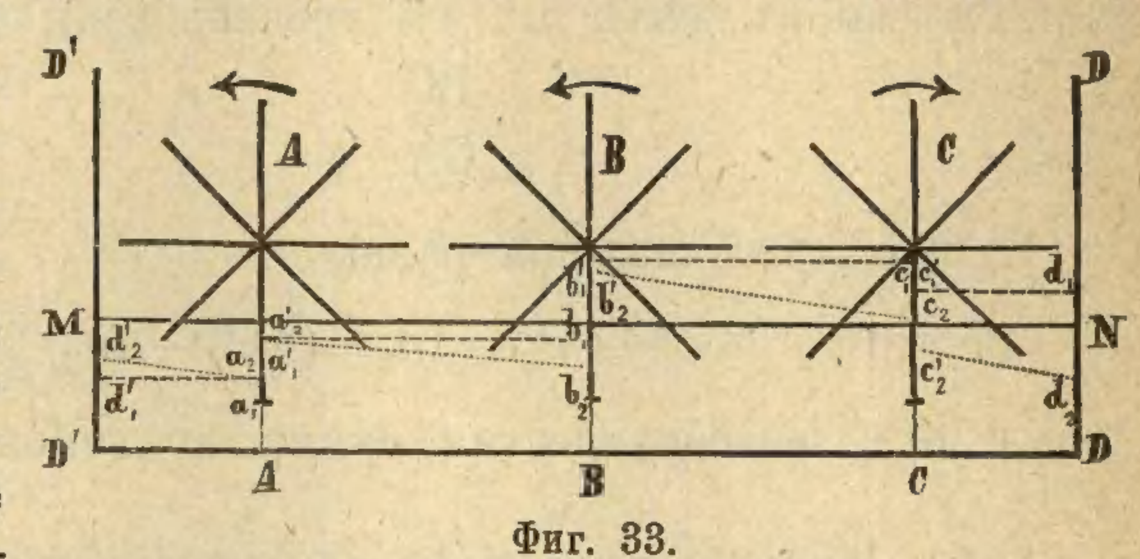
§ 81. *Гальваническій токъ.* Жидкости, дѣйствующія химически на прикасающіеся къ нимъ проводники, не подчиняются 2-му закону Вольты и къ нимъ не примѣнимы выведенныя сейчасъ слѣдствія. Если составимъ цѣпь изъ ряда проводниковъ, между которыми хотя одинъ представляетъ такую жидкость, и сдѣлаемъ крайніе проводники одинаковыми, то потенціалы на нихъ не будутъ равны. Разность между потенціалами концовъ такой цѣпи называется электровозбудительной силой цѣпи. Примѣромъ такой цѣпи можетъ служить любой гальваническій элементъ, или батарея, въ которомъ электроды оканчиваются мѣдными проволоками.

Разсмотримъ напр. элементъ Даніэля. Онъ представляетъ цѣпь изъ слѣдующихъ проводниковъ: Cu, $CuSO_4$, H_2SO_4, Zn, Cu. Въ этой цѣпи происходитъ химическое дѣйствіе между Zn и H_2SO_4 и между продуктами разложеніи H_2SO_4 и $CuSO_4$, и Cu имѣетъ большій потенціалъ, чѣмъ Cu_1. Эту разность потенціаловъ нельзя измѣнить, не нарушая равновѣсія въ остальныхъ частяхъ цѣпи и въ соединеніяхъ. Если бы мы сообщили Cu_1 какой нибудь положительный зарядъ, онъ распространился бы по всей цѣпи такъ, какъ если бы она представляла однородный проводникъ, и, слѣд., увеличилъ бы потенціалы всѣхъ частей, а въ томъ числѣ и Cu на одну и ту же величину. Электровозбудительная сила не измѣнилась бы. То же было бы и съ отрицательнымъ зарядомъ, который мы сообщили бы Cu, или Cu_1.

Если соединимъ оба конца, они образуютъ одинъ мѣдный проводникъ. Электричество на немъ было бы въ равновѣсіи, если бы потенціалы обѣихъ частей сравнялись; но тогда не могло бы быть равновѣсія въ остальныхъ частяхъ цѣпи. Отсюда заключаемъ, что въ такой замкнутой цѣпи электричество совсѣмъ не можетъ прійти въ равновѣсіе, и будетъ существовать токъ электричества. Положительное электричество будетъ переходить съ Cu на Cu_1 и дальше будетъ стремиться

распространяться по всей цѣпи, какъ по однородному проводнику, и, слѣдовательно, опять возвращаться на Cu, отрицательное будетъ совершать обратный путь. Это будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока сами проводники, въ данномъ случаѣ Zn и H_2SO_4 не измѣнятся на столько, что между ними прекратится химическое дѣйствіе и они пріобрѣтутъ свойства проводниковъ Вольтова ряда.

§ 82. Поясн имъ сказанное одной механической аналогіей. Вообразимъ лотокъ съ горизонтальнымъ дномъ, загнутый въ видѣ кольца около вертикальной оси, такъ что концы его сходятся и внутри образуется одинъ сплошной каналъ. Фиг. 33 изображаетъ лотокъ перерѣзаннымъ въ одномъ мѣстѣ и разогнутымъ, такъ что для того, чтобы вполнѣ наглядно представить предполагаемый лотокъ, надо было бы вырѣзать этотъ рисунокъ и соединить концы. Оба конца представляютъ одно и то же сѣченіе лотка; весь чертежъ представляетъ продольное вертикальное сѣченіе развернутаго лотка. Въ лоткѣ налита вода до уровня MN и вставлены три турбины A, B и C. Турбины вращаются въ направленіяхъ, указанныхъ стрѣлками и укрѣплены на пловучихъ стойкахъ, такъ что могутъ подыматься и опускаться, оставаясь погруженными всегда на одинаковую глубину, но не могутъ перемѣщаться ни вправо, ни влѣво.



Фиг. 33.

Вращеніемъ одной турбины A вода перегоняется изъ лѣвой части лотка въ правую. Положимъ пока, что въ сѣченіи D помѣщена перегородка, не пропускающая воду. Тогда направо отъ турбины A уровень воды повысится, а налѣво—понизится. Подъ дѣйствіемъ тяжести вода стремится, а отчасти и протекаетъ внизу и съ боковъ турбины справа налѣво съ тѣмъ большей силой, чѣмъ больше разность уровней. Поэтому, чтобы поддержать бо́льшую разность уровней, нужно болѣе быстрое вращеніе турбины. Каждой данной скорости будетъ соотвѣтствовать опредѣленная разность уровней. Эта разность не будетъ зависѣть отъ абсолютной величины уровней. Такъ, если мы прильемъ нѣсколько воды, положимъ, въ правую часть, то въ лѣвой уровень воды повысится, такъ что прибавочное количество воды разольется по лотку равнымъ слоемъ, какъ будто бы турбины не было.

Такое же дѣйствіе производятъ и другія двѣ турбины, только турбина C вращается въ противоположную сторону и поддерживаетъ болѣе высокій уровень влѣво отъ себя. При дѣйствіи трехъ турбинъ, какъ и при одной, въ лоткѣ вскорѣ установится состояніе подвижного равновѣсія воды: сколько воды перегоняетъ каждая турбина въ одну сторону, столько перетекаетъ около нея внизу и съ боковъ въ другую, такъ что въ каждой части лотка уровень воды не измѣняется. Состояніе уровней изобразится ломанной линіей $d'_1 a_1 a'_1 b_1 b'_1 c_1 c'_1 d_1$.

Положимъ теперь, что перегородка D вынута. Подъ дѣйствіемъ тяжести вода будетъ переливаться изъ части CD въ D'A; оттуда она

будетъ распространяться по всему лотку равномѣрно, какъ будто бы турбинъ не было, и возвратится снова въ часть CD, отсюда снова въ DA и т. д. Получится безконечный токъ воды, пока дѣйствуютъ турбины. Видъ свободной поверхности воды измѣнится. Разности уровней воды по ту и другую сторону каждой турбины поддерживаются ими постоянными; но на протяженіи каждой части лотка между двумя турбинами уровень воды будетъ понижаться по направленію тока. Сѣченіе свободной поверхности воды изобразитси пунктирной линіей $d'_2 a_2 a'_2 b_2 b'_2 c_2 c'_2 d_2$. Сумма всѣхъ паденій уровня на протяженіи отдѣльныхъ частей лотка равна алгебраической суммѣ подъемовъ его турбинами. Въ самомъ дѣлѣ: въ AB уровень воды опускается на $Aa'_2 - Bb_2$

„ BC . . . . $Bb'_2 - Cc_2$

„ CA . . . . $Cc'_2 - Aa_2$

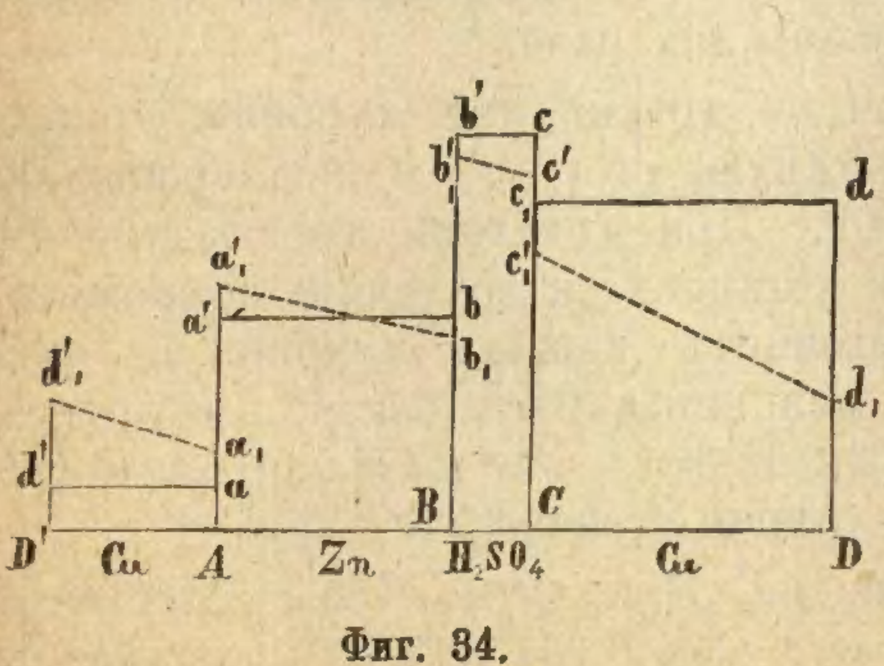
Сумма всѣхъ паденій равна

$$Aa'_2 - Bb_2 + Bb'_2 - Cc_2 + Cc'_2 - Aa_2 = (Aa'_2 - Aa_2) + (Bb'_2 - Bb_2) + (Cc'_2 - Cc_2),$$

а это и есть алгебраическая сумма подъемовъ уровня турбинами A, B и C.

§ 83. Части лотка, раздѣленныя турбинами, могутъ представлять для насъ разнородные проводники гальванической цѣпи. Части, раздѣленныя перегородкой,—два однородные проводника на концахъ. Вращеніе турбинъ представляетъ электровозбудительныя силы въ мѣстахъ прикосновенія, разстоянія уровней — разности потенціаловъ, разстояніе уровней по обѣ стороны перегородки, когда она закрыта,—электровозбудительную силу всей цѣпи.

Теперь не трудно представить себѣ, какъ измѣняется величина потенціала на протяженіи цѣпи, по которой идетъ токъ: она будетъ измѣняться подобно тому, какъ измѣняется уровень воды въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ. Предположимъ самую простую цѣпь—элементъ Вульстена, замкнутый мѣдной проволокой. Эта цѣпь состоитъ изъ трехъ разнородныхъ проводниковъ: мѣди, цинка и сѣрной кислоты, какъ нашъ лотокъ изъ трехъ частей. Когда цѣпь разомкнута, то мѣдный электродъ и мѣдный стержень, прикрѣпленный къ цинковому электроду, составляютъ два отдѣльныхъ проводника. Это соотвѣтствуетъ раздѣленію части лотка CA перегородкой D на двѣ части CD и DA. Схематически можно изобразить всѣ части элемента расположенными въ рядъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ проходятся токомъ. Для полной аналогіи съ механической моделью начнемъ съ мѣднаго стержня цинковаго электрода. Отрѣзокъ D'A (фиг. 34) изображаетъ длину мѣднаго стержня, AB—среднюю длину пути тока въ цинкѣ, BC—разстояніе между электродами въ кислотѣ, CD—среднюю длину пути тока въ мѣдной пластинкѣ и мѣдной проволокѣ. На перпендикулярахъ къ D'D будемъ



Фиг. 34.

откладывать отрѣзки, пропорціональные потенціаламъ соотвѣтствующихъ точекъ проводниковъ. Когда цѣпь разомкнута, измѣненіе потенціала изобразится ломанной линіей $d'a\,a'b\,b'c\,c'd$. Dd—$D'd'$ изображаетъ величину электровозбудительной силы цѣпи. Она равна алгебраической суммѣ всѣхъ разностей потенціаловъ въ мѣстахъ прикосновенія. Въ самомъ дѣлѣ:

$$Aa'=Aa+aa'=D'd'+aa';\quad Bb'=Bb+bb'=Aa'+bb'=D'd'+aa'+bb';$$

$$Cc'=Cc-c'c=Bb'-c'c=D'd'+aa'+bb'-c'c;\quad Dd=Cc'=D'd'+aa'+bb'-c'c.$$

Отсюда $Dd-D'd'=aa'+bb'-c'c$, ч. и т. д.

Если соединить D съ D′, положительное электричество будетъ перетекать отъ CD къ D′A, отрицательное—наоборотъ. Оба электричества будутъ стремиться разойтись по всей цѣпи, какъ по однородному проводнику. Это вызоветъ пониженіе потенціала въ правыхъ частяхъ проводниковъ и подъемъ его въ лѣвыхъ; поэтому линіи $d'a$, $a'b$, $b'c$ и $c'd$ получатъ наклонъ направо внизъ. Разности же потенціаловъ въ мѣстахъ прикосновенія уменьшатся очень незначительно; такъ какъ если бы онѣ совсѣмъ не уменьшились, то черезъ спаи не протекало бы электричество, а значительному измѣненію ихъ мѣшаютъ электровозбудительныя силы въ мѣстахъ прикосновенія. Измѣненіе потенціала изобразится теперь ломанной линіей $d'_1a_1a'_1b_1b'_1c_1c'_1d_1$. На протяженіи каждаго однороднаго проводника потенціалъ непрерывно падаетъ, считая по направленію тока. При переходѣ съ одного проводника на другой онъ внезапно измѣняется: повышается, или понижается, но сумма подъемовъ должна быть больше суммы паденій. Разность между суммой подъемовъ и суммой паденій потенціала въ мѣстахъ прикосновенія, равная, по предыдущему, электровозбудительной силѣ цѣпи, равна въ то же время суммѣ паденій потенціала на протяженіи всѣхъ проводниковъ.

Паденіе потенціала на Zn равно Aa'_1-Bb_1

" " " H_2SO_4 " Bb'_1-Cc_1

" " " Cu " Cc'_1-Aa_1

Сумма всѣхъ паденій равна

$$Aa'_1-Bb_1+Bb'_1-Cc_1+Cc'_1-Aa_1=(Aa'_1-Aa_1)+(Bb'_1-Bb_1)+(Cc'_1-Cc_1),$$

ч. и т. д.

Б. Гернъ (Смоленскъ).

(Окончаніе слѣдуетъ).

ОЧЕРКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

IX. Приложеніе анализа безконечно малыхъ къ геометріи Лобачевскаго.

Анализъ безконечно малыхъ—естественно находитъ себѣ примѣненіе въ геометріи Лобачевскаго во всѣхъ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ онъ примѣняется къ геометріи Евклида. Основныя положенія, которыми при этомъ приходится руководствоваться, заключаются въ слѣдующемъ:

А) *Геометрія безконечно малыхъ совпадаетъ съ геометріей Евклида.*

Это утвержденіе не имѣетъ, въ сущности, опредѣленнаго содержанія. Сохраняя эту формулировку, установившуюся въ литературѣ, мы укажемъ теперь точнѣе то содержаніе, которое обыкновенно присвоивается этому положенію.

Если катеты a и b прямоугольнаго треугольника приближаются къ нулю, слѣдуя какому угодно закону, то элементы такого треугольника можно считать связанными уравненіями Евклидовой тригонометріи во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда безконечно малыя высшихъ порядковъ (по отношенію къ a и b) не идутъ въ счетъ. Это было строго доказано въ VI-ой главѣ. (См. „Вѣстн." № 199 стр. 149). Отсюда непосредственно вытекаетъ, что тѣ же соотношенія примѣнимы ко всякому треугольнику, стороны котораго безконечно малы.

В) Отсюда слѣдуетъ далѣе, что четырехугольникъ Саккери съ четырьмя безконечно малыми сторонами, можно считать прямоугольникомъ въ евклидовомъ смыслѣ слова, и ясно, что площади двухъ такихъ прямоугольниковъ относятся, какъ произведенія основаній на высоты,—опять таки, конечно, пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ. Или иначе, площадь такого прямоугольника пропорціональна произведенію изъ основанія на высоту. Это было доказано независимо отъ предыдущаго положенія въ VII главѣ.

Тамъ было обнаружено, что площадь безконечно малаго треугольника *равна* полупроизведенію изъ основанія на высоту; коэффиціентъ пропорціональности такимъ образомъ равенъ 1. Но нужно имѣть въ виду, что при этомъ за единицу площади (δ) принята площадь треугольника, въ которомъ сумма внутреннихъ угловъ меньше π на единицу угловой мѣры,—а углы, въ свою очередь, выражены въ линейной мѣрѣ.

---

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики" №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195 196, 198, 199, 201, 202, 203, 206, 207, 209, 214 и 216.

C) Представимъ себѣ безконечно малый прямоугольникъ ABCD. Изъ вершинъ его возставимъ перпендикуляры къ его плоскости, на которыхъ отложимъ равные отрѣзки $AA' = BB' = CC' = DD'$. Если отрѣзки эти безконечно малы, то четырехугольники $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, $DD'A'A$ могутъ быть приняты за прямоугольники; четырехугольникъ $A'B'C'D'$ можно считать равнымъ ABCD, пренебрегая только безконечно малыми высшихъ порядковъ; на многогранникъ $A'B'C'D'ABCD$ можно смотрѣть, какъ на прямой прямоугольный параллелопипедъ въ евклидовомъ смыслѣ слова. Очевидно, объемы такихъ параллелопипедовъ относятся, какъ произведенія изъ площади основанія на высоту или, иначе, объемъ прямого прямоугольнаго параллелопипеда съ безконечно малыми сторонами можно считать пропорціональнымъ произведенію трехъ его измѣреній—если величины, которыя безконечно малы по сравненію съ этимъ объемомъ, въ счетъ не идутъ.

D) Если въ формулѣ XXXVIII *a*) положить $y_1 = y_2 = \eta$ и $x_2 - x_1 = \xi$, то мы получимъ:

$$\sin r' = \frac{\sin^2\eta' \sin\xi'}{1 - \cos^2\eta' \sin\xi'}.$$

Эта формула опредѣляетъ верхнее основаніе четырехугольника Саккери, въ которомъ нижнее основаніе равно ξ, а боковая сторона равна η. Изъ этого уравненія мы получаемъ:

$$\frac{1 - \sin r'}{2\sin r'} = \frac{1 - \sin\xi'}{2\sin\xi' \sin^2\eta'},$$

или на основаніи уравненія XIX *a*):

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{r}{2}\right)' = \frac{\operatorname{cotg}(\xi/_2)'}{\sin\eta'}.$$

Если основаніе ξ становится безконечно малымъ, то и r стремится къ нулю. Пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ, мы получаемъ изъ послѣдняго уравненія:

$$r = \frac{\xi}{\sin y'}, \qquad \text{LX}$$

такъ какъ мы ужъ не разъ замѣчали, что $\operatorname{cotg} \Pi(x)$ отличается отъ x при безконечно малыхъ значеніяхъ x лишь безконечно малыми высшихъ порядковъ.

E) Сохраняя условіе предыдущей главы, т. е. принимая длину $r = l$, фигурирующую въ уравненіяхъ XX—XXIV, за единицу длины, мы напишемъ уравненіе XX *a*) въ видѣ:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z' = e^{-z}.$$

Дифференцируя его, получаемъ:

$$\frac{dz'}{2\cos^2 {}^1/_2\, z'} = -e^{-z} dz = -\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z' dz.$$

Отсюда

$$\frac{dz'}{\sin z'} = -dz. \qquad \text{LXI}$$

F) Наконецъ, присоединимъ сюда еще соотношенія, выведенныя въ началѣ главы V:

$$\lim_{(x=\infty)} \Pi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{(x=0)} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\left(\omega=\frac{\pi}{2}\right)} \Phi(\omega) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{(\omega=0)} \Phi(\omega) = \infty \qquad \text{LXII}$$

Выведемъ теперь уравненіе касательной къ плоской кривой. Напишемъ для этого уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ безконечно близкія точки (x,y) и $(x+dx,\ y+dy)$. Подставляя эти координаты въ уравненіе XLI вмѣсто $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$—и обозначая текущія координаты черезъ X и У, получимъ:

$$\begin{vmatrix} e^{X} & e^{-X} & \cos Y' \\ e^{x} & e^{-x} & \cos y' \\ e^{x+dx} & e^{-x-dx} & \cos(y+dy)' \end{vmatrix} = 0.$$

Помножая первую вертикаль на e^{-x}, а вторую на e^{x} и вычитая послѣ этого вторую горизонталь изъ третьей, получимъ:

$$\begin{vmatrix} e^{X-x} & e^{x-X} & \cos Y' \\ 1 & 1 & \cos y' \\ e^{dx}-1 & e^{-dx}-1 & \cos(y+dy)'-\cos y' \end{vmatrix} = 0.$$

Пренебрегая безконечно малыми высшихъ порядковъ, можно, во первыхъ, замѣнить $e^{dx}-1$ и $e^{-dx}-1$ черезъ dx и $-dx$; во вторыхъ принять:

$$\cos(y+dy)' - \cos y' = d\cos y' = -\sin y'\, dy' = \sin^2 y'\, dy,$$

на основаніи уравненія XLI. Послѣ подстановки этихъ выраженій мы получимъ:

$$\begin{vmatrix} e^{X-x} & e^{x-X} & \cos Y' \\ 1 & 1 & \cos y' \\ dx & -dx & \sin^2 y' dy \end{vmatrix} = 0.$$

$$e^{X-x}(\cos y'\, dx + \sin^2 y'\, dy) + e^{x-X}(\cos y' dx - \sin^2 y'\, dy) = 2dx\cos Y'. \qquad \text{LXIII}$$

Съ помощью этого уравненія уже не трудно получить уравненіе нормали. Предположимъ для этого, что уравненіе

$$Ae^{x} + Be^{-x} = C\cos y' \qquad (1)$$

представляетъ собой нѣкоторую прямую, и требуется найти уравненіе прямой, къ ней перпендикулярной и проходящей черезъ точку (x_0, y_0). Пусть это уравненіе будетъ:

$$Me^x + Ne^{-x} = P\cos y'. \qquad (2)$$

Тогда имѣемъ, во первыхъ,

$$Me^{x_0} + Ne^{-x_0} = P\cos y'_0. \qquad (3)$$

Во вторыхъ, на основаніи уравненія XLVI,

$$2MB + 2NA = PC \qquad (4)$$

Исключая M, N и P изъ (2), (3) и (4), находимъ требуемое уравненіе:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos y' \\ e^{x_0} & e^{-x_0} & \cos y'_0 \\ 2B & 2A & C \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначая здѣсь текущія координаты черезъ X и У и замѣняя координаты (x_0, y_0) черезъ x, y, а коэффиціенты A, B и C коэффиціентами уравненія LXIII, получимъ уравненіе нормали:

$$\begin{vmatrix} e^{X} & e^{-X} & \cos У' \\ e^{x} & e^{-x} & \cos y' \\ e^{x}(\cos y' dx - \sin^2 y' dy) & e^{-x}(\cos y' dx + \sin^2 y' dy) & dx \end{vmatrix} = 0.$$

Если здѣсь помножить первую вертикаль на e^{-x}, вторую на e^{x}, затѣмъ изъ третьей горизонтали вычесть вторую, помноживъ ее предварительно на $\cos y' dx$, наконецъ послѣ этого сократить уравненіе на $\sin^2 y'$, то мы получимъ:

$$\begin{vmatrix} e^{X-x} & e^{x-X} & \cos У' \\ 1 & 1 & \cos y' \\ -dy & dy & dx \end{vmatrix} = 0$$

или

$$e^{X-x}(\cos y' dy - dx) + e^{x-X}(\cos y' dy + dx) = 2\cos У' dy. \qquad \text{LXIV}$$

Примѣнимъ это уравненіе къ нѣсколькимъ простымъ случаямъ: Уравненіе

$$y = \text{const.} = y_0,$$

представляетъ собой кривую равныхъ разстояній, для которой ось абсциссъ служитъ основаніемъ. Въ этомъ случаѣ $dy = 0$ и уравненіе LXIV имѣетъ видъ:

$$e^{X-x} - e^{x-X} = 0 \text{ или } x = X.$$

Это обнаруживаетъ, что нормаль къ линіи равныхъ разстояній всегда перпендикулярна къ основанію, какъ мы уже видѣли въ прошлой главѣ.

Уравненіе:

$$\sin y' \sin x' = \sin r' \qquad (5)$$

представляетъ собой окружность круга, имѣющаго центръ въ началѣ координатъ и радіусъ, равный r, такъ какъ разстояніе точки (x,y) отъ начала координатъ по формулѣ XXXVIII a) равно $\sin x' \sin y'$. Дифференцируя это уравненіе получаемъ:

$$\sin y' \cos x' \, dx' + \sin x' \cos y' \, dy' = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x'}{\cos y'}. \qquad (6)$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе LXIV, мы получимъ уравненіе нормали къ окружности:

$$e^{X-x}(1+\cos x') - e^{x-X}(1-\cos x') = \frac{2\cos Y' \cos x'}{\cos y'}.$$

Уравненіе это допускаетъ упрощеніе. Прежде всего мы можемъ представить его въ видѣ:

$$\cos y' \left(e^{X-x} \cos^2 \tfrac{1}{2} x' - e^{x-X} \sin^2 \tfrac{1}{2} x'\right) = \cos Y' \cos x'.$$

Замѣняя здѣсь e^x черезъ $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} x'$, получаемъ:

$$\tfrac{1}{2}(e^X - e^{-X}) \sin x' \cos y' = \cos Y' \cos x' \qquad (7)$$

или, наконецъ, на основаніи уравненія LXII a):

$$\operatorname{tg} X' \cos Y' = \operatorname{tg} x' \cos y'.$$

Уравненіе (7) обнаруживаетъ, что нормаль проходитъ черезъ начало координатъ, а изъ формулы VI видно, что обѣ части *послѣдняго* уравненія выражаютъ tangens угла, который она образуетъ съ осью абсциссъ.

В. Каганъ (Спб.).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

ИЗСЛѢДОВАНІЕ О МНОГОГРАННИКАХЪ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ.

А. БРАВЭ.

(Переводъ съ французскаго).

(Продолженіе).*

Теорема XLI.—*Въ каждомъ сфероэдрическомъ многогранникѣ, имѣющемъ ось симметріи* L^q *порядка выше второго, общее число* Q *осей порядка* q, *принадлежащихъ этому многограннику, должно равняться половинѣ числа угловъ правильнаго вспомогательнаго многогранника, удовлетворяющаго слѣдующимъ условіямъ:* 1) *чтобы центръ его формы былъ центромъ симметріи,* 2) *чтобы каждый тѣлесный уголъ его былъ образованъ* q *сторонами.*

Ось L^q необходимо связана съ осью $L^{q'}$, гдѣ q' больше 2 (теорема XXXIX). Если мы поворотимъ L^q вокругъ $L^{q'}$ на уголъ $\frac{360^0}{q'}$, то опредѣлится положеніе второй оси порядка q, отличной отъ первоначальной оси L^q (теорема X, примѣчаніе).

Пусть OA и OB, фиг. 35, эти обѣ оси порядка q, которыя пересѣкаются въ O, центрѣ формы многогранника. Изъ O, какъ центра, опишемъ шаръ радіуса 1, который пересѣчетъ обѣ оси OA и OB въ A и B, и соединимъ ихъ дугой большого круга AB. Можно постоянно принять, что

Фиг. 35.

$$\text{дуга } AB < 90^0 \text{ или } = 90^0.$$

Въ противномъ случаѣ можно обратиться къ дополненію угла AOB. Точно также можно всегда принять, что OA и OB выбраны такъ, что уголъ, подъ которымъ онѣ пересѣкаются, наименьшій изъ всѣхъ, образуемыхъ осями порядка q между собой. Установивши это, поворотимъ многогранникъ на $\frac{360^0}{q}$ вокругъ оси OB порядка q. Точка A придетъ въ C; соединимъ BC дугой большого круга, тогда

$$ABC = \frac{360^0}{q},$$

и прямая OC будетъ также осью порядка q (теорема X, примѣчаніе). Проведемъ такимъ же образомъ дугу большого круга CD, чтобы

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“ №№ 214, 215, 218 и 221.

$$CD = CB = AB \text{ и } BCD = \frac{360^0}{q},$$

тогда прямая OD будетъ въ свою очередь осью порядка q.

Если мы поворотимъ вторично многогранникъ на $\frac{360^0}{q}$ вокругъ оси OC по направленію отъ B къ D, то результатомъ этого будетъ совпаденіе точки B съ D. Точка A останется въ C. Оба вращенія эквивалентны одному повороту вокругъ точки M, полюсѣ сферическаго круга, проходящаго черезъ точки A, B, C и D*). Двойное вращеніе вокругъ OB и OC не измѣняетъ видимаго положенія угловъ многогранника; точно также не производитъ никакого измѣненія одно вращеніе вокругъ M, которое замѣняетъ предыдущія; тогда прямая OM будетъ осью симметріи многогранника, и очевидно, что при поворотѣ многогранника на уголъ, равный углу AMC, вокругъ OM, положеніе угловъ многогранника останется неизмѣннымъ; слѣдовательно этотъ уголъ соизмѣримъ съ окружностью (теорема II). Тогда число угловъ A, B, C, D и т. д., расположенныхъ на окружности малаго круга, ограничено: слѣдовательно эти углы образуютъ правильный, вписанный многоугольникъ, число сторонъ котораго можетъ быть обозначено r. Мы должны постоянно принимать, что A и B — два сосѣднихъ угла; тогда можно написать

$$AMB = \frac{360^0}{r}$$

формулу, въ которой число r необходимо больше 2.

Такъ какъ AMB и ABC части 360^0, то правильный сферическій многоугольникъ ABCDE, повторяющійся въ CBC'D''... и въ A'ABC'D'... и т. д., покроетъ въ концѣ всю поверхность шара. Совокупность всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ точекъ образуетъ здѣсь вершины угловъ правильнаго вписаннаго многогранника, и этотъ многогранникъ будетъ непремѣнно однимъ изъ тѣхъ, въ которомъ стороны сходятся въ число q, для образованія каждаго угла.

Пять правильныхъ многогранниковъ геометріи имѣютъ всѣ, за исключеніемъ правильнаго тетраэдра, центръ симметріи въ центрѣ ихъ формы; но въ тетраэдрѣ, вписанномъ въ шаръ, угловое разстояніе AB двухъ вершинъ превышаетъ 90^0. Такимъ образомъ этотъ случай не можетъ имѣть мѣста, такъ какъ онъ противорѣчитъ нашему построенію.

Вписанный многогранникъ, вытекающій изъ вышеприведеннаго построенія, будетъ такимъ образомъ или кубъ, т. е. случай соотвѣтствующій $q = 3$, $r = 4$, — тогда**)

---

*) Этотъ полюсъ M лежитъ въ точкѣ пересѣченія дугъ большого круга BM и CM, которыя дѣлятъ пополамъ сферическіе углы ABC и BCD.

**) Дуги AB и AM опредѣляются по извѣстнымъ формуламъ:

$$\cos\frac{1}{2}AB = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{q}\cdot\cos\frac{\pi}{r} \text{ и } \cos AM = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{q}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{r}.$$

$$AB = 70^0 32', \ AM = 54^0 44',—$$

или правильный октаэдръ, что соотвѣтствуетъ случаю $q = 4$, $r = 3$,— тогда

$$AB = 90^0, \ AM = 54^0 44',—$$

или правильный додекаэдръ, что соотвѣтствуетъ случаю $q=3$, $r=5$,— тогда

$$AB = 41^0 49', \ AM = 37^0 23',—$$

или правильный икосаэдръ, что соотвѣтствуетъ случаю $q = 5$, $r = 3$,— тогда

$$AB = 63^0 26', \ AM = 37^0 23'.$$

Пусть M—число угловъ полученнаго такимъ образомъ правильнаго многогранника; такъ какъ каждый уголъ имѣетъ гомологичный себѣ, находящійся въ діаметрально противоположномъ положеніи, то, очевидно, что общее число Q осей порядка q будетъ, по крайней мѣрѣ, равняться $\frac{1}{2}$ M. Докажемъ дальше, что не можетъ быть $Q > \frac{1}{2} M$. Если бы Q было больше $\frac{1}{2}$ M, то одна изъ осей порядка q встрѣтила бы шаровую поверхность въ точкѣ X, внутри котораго-нибудь изъ сферическихъ многоугольниковъ ABCDE. Тогда одно изъ дуговыхъ разстояній между X и углами A, B, C, D было бы обязательно меньше, чѣмъ AM и тѣмъ паче чѣмъ AB (согласно синоптической таблицѣ соотвѣтственныхъ значеній AB и AM), что противорѣчитъ предположенію о наименьшемъ наклонѣ между двумя осями OA и OB. Итакъ не можетъ быть

$$Q > \frac{1}{2} M;$$

слѣдовательно

$$Q = \frac{1}{2} M.$$

Теорема XLII. — *Сфероэдрическій многогранникъ можетъ имѣть только тройныя, четверныя или пятерныя оси, не считая двойныхъ осей.*

Это слѣдуетъ изъ содержанія предыдущей теоремы. Такъ какъ L^q есть одна изъ осей многогранника, то количество q можетъ быть только числомъ сторонъ, соединяющихся для образованія угла правильнаго многогранника; слѣдовательно мы будемъ имѣть

$$q = 3, \text{ или } 4, \text{ или } 5.$$

Теорема XLIII. — *Существуютъ двѣ различныя группы сфероэдрическихъ многогранниковъ: такіе, въ которыхъ имѣются четыре тройныя оси и такіе, которые содержатъ десять тройныхъ осей.*

Постараемся разсмотрѣть одинъ за другимъ четыре случая, къ которымъ приводитъ взаимное образованіе Q осей L^q, и пусть M, постоянно число угловъ правильнаго вписаннаго многогранника, получающагося путемъ такого рода повторенія.

Въ случаѣ куба (теорема XLI)

$$q = 3,\ M = 8,\ Q = \frac{1}{2} M = 4.$$

Въ случаѣ октаэдра

$$q = 4,\ M = 6,\ Q = \frac{1}{2} M = 3.$$

Получающіяся такимъ образомъ три четверныя оси—перпендикулярны другъ къ другу, значитъ имѣется и четыре тройныхъ осей (теорема XIV), число послѣднихъ не можетъ быть больше, такъ какъ новыя тройныя оси вызвали бы повтореніе четверныхъ осей, и Q было бы больше 3, что невозможно.

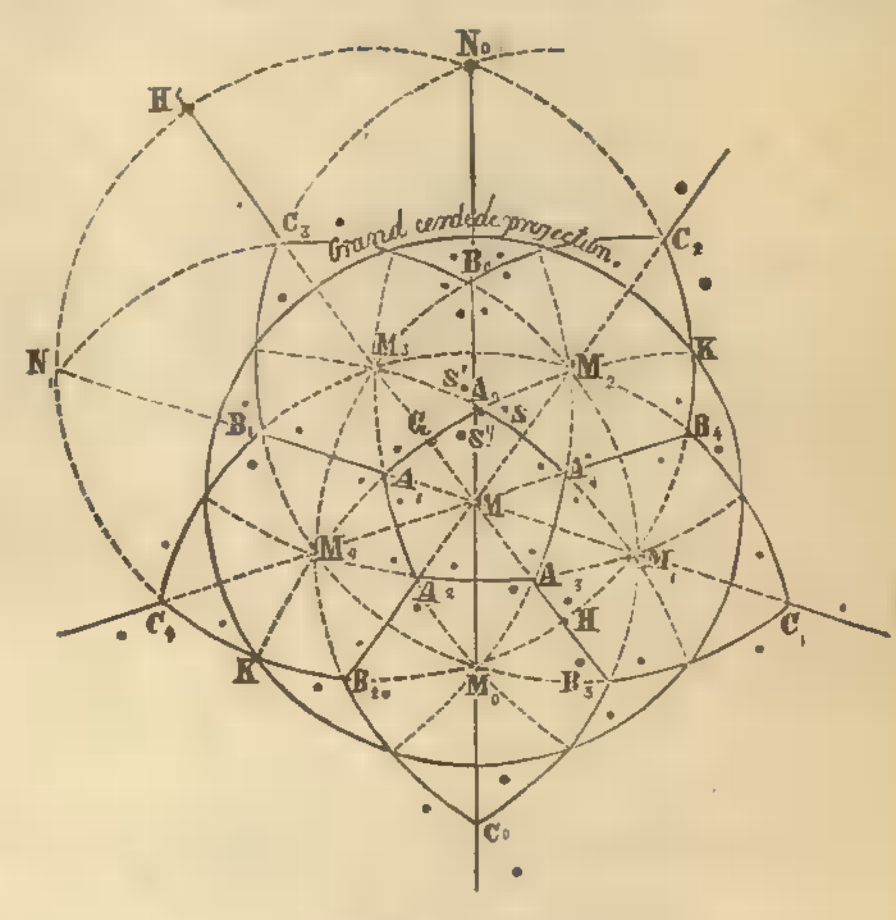
Въ случаѣ додекаэдра

$$q = 3,\ M = 20,\ Q = \frac{1}{2} M = 10.$$

Въ случаѣ икосаэдра

$$q = 5,\ M = 12,\ Q = \frac{1}{2} M = 6.$$

Пусть теперь M, M_0 и M_1 фиг. 36, три сосѣднихъ угла вписаннаго икосаэдра. Перпендикуляръ, проведенный изъ центра шара на сторону MM_0M_1 есть, очевидно, тройная ось, и такъ какъ въ икосаэдрѣ имѣются двадцать попарно параллельныхъ плоскостей, то получится десять тройныхъ осей; и ихъ не можетъ быть больше, такъ какъ для $q = 3$ мы найдемъ только два значенія Q=4 и Q=10 (теорема XLI); слѣдовательно и т. д.



Фиг. 36.

Примѣчаніе. — Такимъ образомъ мы можемъ раздѣлить сфероэдрическіе многогранники на двѣ группы: *кватертерные* съ четырьмя тройными осями, расположенными, какъ четыре главныя діагоноли куба, и *децемтерные* съ десятью тройными осями, расположенными, какъ десять главныхъ діагоналей правильнаго додекаэдра.

Як. Самойловъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Послѣдніе успѣхи въ области нео-электричества. *Н. Н. Шиллера.* (Оттискъ изъ „Университетскихъ Извѣстій" за 1895 г.). Кіевъ. 1895.

Элементарная теорія относительнаго диженія. *Н. Шиллера.* (Отд. оттискъ изъ „Университетскихъ Извѣстій"). Кіевъ. 1895.

Общiя условiя равновѣсiя насыщеннаго пара и его жидкости подъ дѣйствiемъ приложенныхъ силъ. *Н. Шиллера.* Отдѣльный оттискъ изъ VII тома Трудовъ Отдѣленiя Физическихъ Наукъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанiя, Антропологiи и Этнографiи. Москва. 1895.

Теорема сложенiя трансцендентныхъ функцiй. *П. М. Покровскаго*, Профессора Университета Св. Владимiра. (Отт. изъ „Математическаго Сборника", т. XVIII). Москва, 1895. Ц. 20 к.

Сборникъ тригонометрическихъ задачъ, примѣненный къ курсамъ гимназiй, реальныхъ училищъ и другихъ среднихъ учебныхъ заведенiй. Матерiалы для практическихъ упражненiй учениковъ въ теченiи учебнаго года и темы для письменныхъ испытанiй. *В. П. Минина*, преподавателя московской 3-й гимназiи. Изданiе третье, значительно дополненное противъ второго, одобреннаго Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенiя для употребленiя въ среднихъ учебныхъ заведенiяхъ. Съ приложенiемъ большого числа задачъ, рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненiемъ геометрiи и тригонометрiи. Изд. книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1895. Ц. 85 коп.

Способъ опредѣленiя показателя преломленiя жидкостей вблизи критической точки. Кн. *Б. Голицына.* Отт. изъ „Извѣстiй Императорской Академiи Наукъ", т. III. № 2. Спб. 1895.

Василiй Григорьевичъ Имшенецкiй. Библiографическiй очеркъ *К. А. Андреева.* Харьковъ. 1895.

Учебникъ Физики для среднихъ учебныхъ заведенiй. Составилъ *С. Ковальевскiй*, преподаватель физики въ С.-Петербургскомъ 1-мъ реальномъ училищѣ. Изданiе 4-е, пересмотрѣнное. Спб. 1895. Ц. 2 р. 20 к.

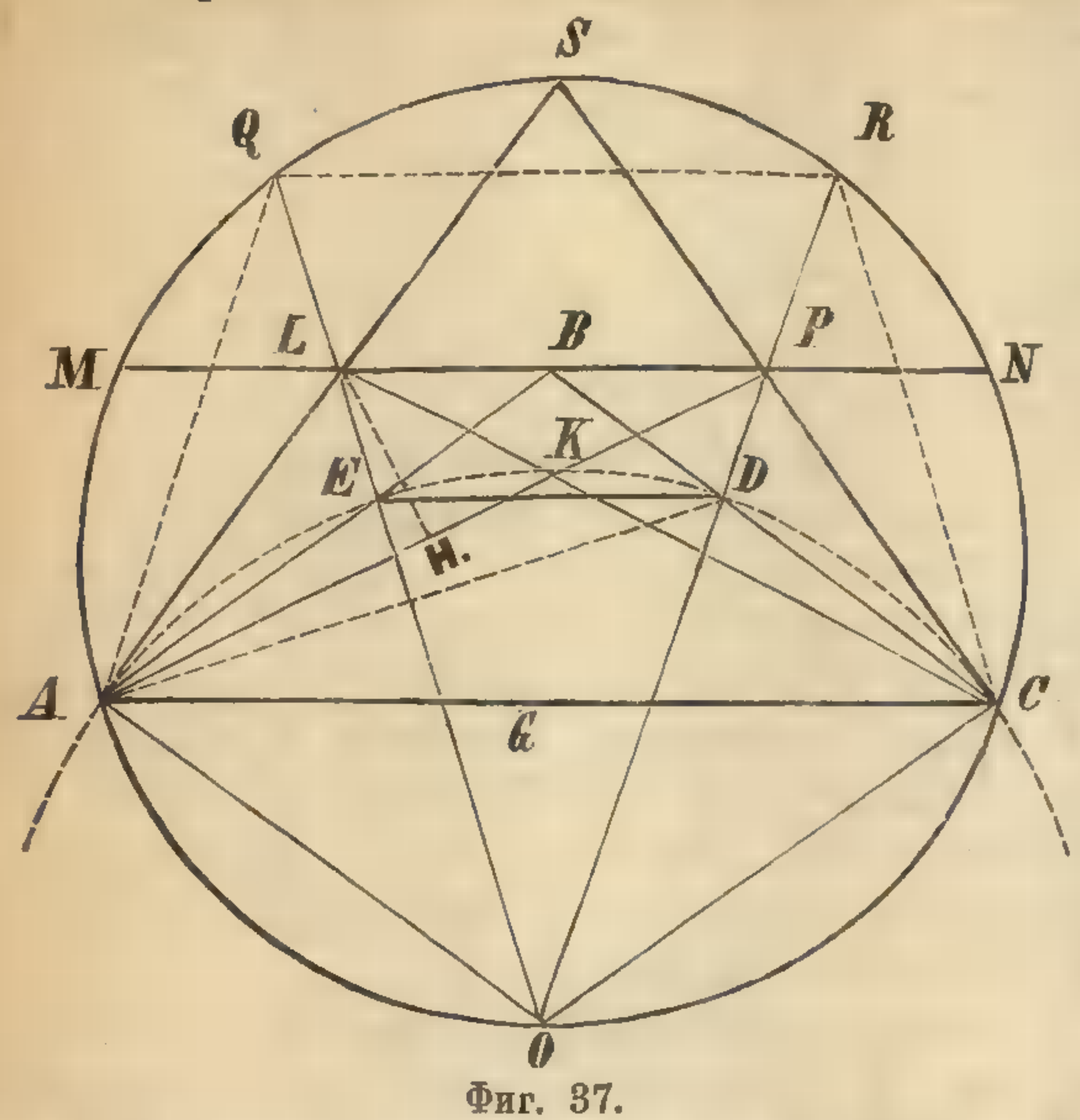
Отчетъ мѣстнаго распорядительнаго комитета, организованнаго Физико-Математическимъ Обществомъ для составленiя капитала имени Н. И. Лобачевскаго. 1893—1895. Казань. 1895.

ЗАДАЧИ.

№ 254. На дняхъ господиномъ *С.* доставлено было въ редакцiю слѣдующее рѣшенiе задачи трисекцiи угла.

Если въ какомъ нибудь равнобедренномъ треугольникѣ ABC (фиг. 37) проведемъ параллельно основанiю прямую DE черезъ точку D пересѣченiя биссектора одного изъ равныхъ угловъ съ противолежащей стороной, то получимъ равнобочную трапецiю о трехъ равныхъ сторонахъ $AEDC$, около которой всегда можно описать окружность. Задачу трисекцiи даннаго угла, напр., AOC, можно, слѣдовательно, свести къ тому, чтобы къ произвольно отрѣзанному въ немъ равнобедренному треугольнику AOC пристроить такую равнобочную о трехъ равныхъ сторонахъ трапецiю $AEDC$, описанная около которой окружность имѣла бы центръ въ вершинѣ даннаго угла O; тогда хорды и дуги AE, ED, DC были бы равны и радiусами OE и OD уголъ раздѣлился бы на три равныя части.

Продолжимъ непараллельныя стороны нашей трапеціи до пересѣченія въ B и проведемъ черезъ точку B прямую MN параллельно основанію AC. Пусть линія AP, проведенная черезъ A и середину K дуги AC, пересѣчетъ прямую MN въ точкѣ P. Изъ середины H прямой AP возставимъ перпендикуляръ HL до пересѣченія въ L съ прямою MN. Тогда получится равнобедренный $\triangle ALP$, въ которомъ $\angle LAP = \angle LPA$; но этотъ послѣдній уголъ равенъ также $\angle PAC$ по причинѣ параллельности прямыхъ MN и AC. Слѣдовательно прямая AP есть биссекторъ угла LAC, а прямая AL есть касательная къ окружности, описанной изъ O около нашей трапеціи $AEDC$.



Фиг. 37.

Отсюда видимъ, что построеніе искомой трапеціи сводится къ слѣдующему: изъ вершины даннаго угла AOC опишемъ произвольнымъ радіусомъ дугу AKC; въ точкахъ A и C возставимъ соотвѣтственно перпендикуляры къ радіусамъ AO и CO и продолжимъ ихъ до пересѣченія въ точкѣ S; въ полученномъ такимъ образомъ равнобедренномъ треугольникѣ ASC дѣлимъ одинъ изъ угловъ при основаніи пополамъ, напр. уголъ SAC прямою AP, и черезъ точку P проводимъ PL параллельно основанію; получимъ равнобочную трапецію о трехъ равныхъ сторнахъ $ALPC$. Проведя прямую SO (діаметръ окружности, описанной около $OASC$), найдемъ середину стороны LP, т. е. точку B; соединивъ эту послѣднюю съ A и C, получимъ новый равнобедренный $\triangle ABC$; раздѣливъ въ немъ одинъ изъ равныхъ угловъ пополамъ, напр. уголъ BAC прямою AD, и проведя прямую DE параллельно основанію, получимъ наконецъ искомую трапецію $AEDO$, вершины которой E и D раздѣлятъ дугу AC на три равныя части. (Точки E и D получаются также пересѣченіемъ дуги AC прямыми LO и PO).

Найти ошибку изложеннаго построенія и показать, въ какихъ частныхъ случаяхъ оно будетъ правильнымъ.

Ш.

№ 255. Дана окружность, центръ которой въ точкѣ O, проведенный въ ней діаметръ AB и точка M на окружности. Требуется черезъ точку M провести хорду MN, пересѣкающую діаметръ AB въ точкѣ X такъ, чтобы отрѣзокъ NX равнялся отрѣзку діаметра XO.

Показать, что задача эта не разрѣшима помощью циркуля и линейки.

И. Дубъ (Одесса).

№ 256. Показать, что во вписанномъ четыреугольникѣ, діагонали котораго взаимно перпендикулярны, произведеніе суммы діагоналей на діаметръ описаннаго круга равно суммѣ четырехъ произведеній сторонъ четыреугольника, взятыхъ попарно.

В. Евгеновъ (Бѣлгородъ).

№ 257. Рѣшить систему уравненій:

$$x^2+y^2=a^2,$$

$$x+y\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=r\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}}.$$

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 258. Даны стороны вписаннаго въ кругъ четыреугольника $ABCD$ ($AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $DA=d$). Чтобы вычислить діаметръ описанной окружности, поступаемъ такъ: черезъ D проводимъ діаметръ DN и, опредѣливъ $AN=\sqrt{x^2-d^2}$ и $NC=\sqrt{x^2-c^2}$, найдемъ по теоремѣ Птоломея:

$$AC=\frac{c\sqrt{x^2-d^2}+d\sqrt{x^2-c^2}}{x},$$

гдѣ x есть искомый діаметръ. Точно такъ же, проведя діаметръ BM и опредѣливъ $AM=\sqrt{x^2-a^2}$ и $CM=\sqrt{x^2-b^2}$, найдемъ

$$AC=\frac{b\sqrt{x^2-a^2}+a\sqrt{x^2-b^2}}{x}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ уравненіе:

$$b\sqrt{x^2-a^2}+a\sqrt{x^2-b^2}=c\sqrt{x^2-d^2}+d\sqrt{x^2-c^2}.$$

Рѣшить это уравненіе.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 259. Число N дѣлится на 18 и имѣетъ нечетныя цифры, число которыхъ равно суммѣ цифръ числа N, дѣленной на 9. Показать, что числа N и $N:2$ имѣютъ одинаковую сумму цифръ.

М. Зиминъ (Орелъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 95 (3 сер.). Доказать, что квадратъ трехчлена a^2+ab+b^2 можетъ быть приведенъ къ трехчлену того же вида.

Возвысивъ данный трехчленъ въ квадратъ, придадимъ къ полученному многочлену и вычтемъ изъ него $a^4+2a^2b^2+2a^3b$. Тогда получимъ:

$$a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2 + b^4 + a^4 - 2a^2b^2 + 2ab^3 - 2a^3b + a^2b^2 - a^4 =$$
$$= (a^2 + 2ab)^2 + (a^2 + 2ab)(b^2 - a^2) + (b^2 - a^2)^2.$$

И. Барковскій (Могилевъ); *Д. Татариновъ* (Троицкъ).

№ 96 (3 сер.). Доказать, что произведеніе

$$(a^2 + ab + b^2)(a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2)$$

можетъ быть приведено къ виду $A^2 + AB + B$?

Перемноживъ данные трехчлены, прибавимъ къ полученному произведенію и вычтемъ изъ него $aa_1^2b + a^2a_1b_1 + 2aa_1bb_1 + a^2a_1^2$. Тогда получимъ:

$$a^2a_1^2 - 2aa_1bb_1 + b^2b_1^2 + a^2a_1^2 + a_1^2b^2 + a^2b_1^2 + aa_1^2b + aa_1^2b +$$
$$+ a^2a_1b_1 + a^2a_1b_1 + 2aa_1bb_1 + aa_1bb_1 + a_1b^2b_1 + abb_1^2 -$$
$$- aa_1^2b - a^2a_1b - a^2a_1^2 = (bb_1 - aa_1)^2 + (aa_1 + a_1b + ab_1)^2$$
$$+ bb_1(aa_1 + a_1b + ab_1) - aa_1(aa_1 + a_1b + ab_1) =$$
$$= (bb_1 - aa_1)^2 + (bb_1 - aa_1)(aa_1 + a_1b + ab_1) + (aa_1 + a_1b + ab_1)^2.$$

А. Павлычевъ (Иваново-Вознесенскъ); *Б. Гуминскій* (Троицкъ).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 177, 245, 247 (3 сер.), 384 (1 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 241, 242, 243, 244 (3 сер.), 221 (2 сер.); *Э. Заторскаго* (Спб.) 163, 202, 207, 210, 219, 228, 237, 239, 240, 241 (3 сер.); *Z. R.* (Тамбовъ) 192, 209, 210, 227, 240 (3 сер.); *А. Павлычева* (Иваново-Вознесенскъ) 96 (3 сер.); *В. Морозова* (Тамбовъ) 239 (3 сер.); *В. Соковича* (Кіевъ) 227, 247 (3 сер.); *В. Евгенова* (Бѣлгородъ) 227, 240 (3 сер.); *Д. Цельмера* (Тамбовъ) 194, 218, 222, 238 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Спб.) 220, 233 (3 сер.); *Д.* (Тамбовъ) 209, 211, 240 (3 сер.); *Д.* и *R.* (Тамбовъ) 213 (3 сер.).

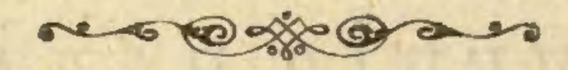
ОТВѢТЫ РЕДАКЦІИ.

Z. R. (Тамбовъ). Задача не будетъ помѣщена.

В. С. (Кіевъ). Уравненіе подобнаго типа уже предлагалось въ „Вѣстникѣ".

Я. Полушкину (с. Знаменка). Ваше рѣшеніе задачи № 242 невѣрно: Вы вводите новый радикалъ $\sqrt{2}$.

Д. (Тамбовъ). Нѣтъ.



Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій**.

Дозволено цензурою. Одесса, 16-го Ноября 1895 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.

Редакція „Вѣстника Оп. Физики“ проситъ г.г. рѣшающихъ и предлагающихъ задачи присылать рѣшенія напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“ задачъ на отдѣльныхъ листкахъ, **не соединяя ихъ съ предлагаемыми для рѣшенія задачами.** Лица, предлагающія задачи, приглашаются присылать вмѣстѣ и краткія ихъ рѣшенія.

Редакція „Вѣстника Оп. Физики“ проситъ своихъ сотрудниковъ дѣлать чертежи къ статьямъ возможно тщательно **на отдѣльныхъ бумажкахъ**, а не въ текстѣ рукописи и отмѣчать желаемое число отдѣльныхъ оттисковъ **на самой статьѣ.**

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

Казанскаго Университета

НА 1896 ГОДЪ.

Въ Ученыхъ Запискахъ помѣщаются:

I. Въ отдѣлѣ наукъ: Ученыя изслѣдованія профессоровъ и преподавателей; сообщенія и наблюденія; публичныя лекціи и рѣчи; отчеты по ученымъ командировкамъ и извлеченія изъ нихъ; научныя работы студентовъ, а также рекомендованные факультетами труды постороннихъ лицъ.

II. Въ отдѣлѣ критики и библіографіи: профессорскія рецензіи на магистерскія и докторскія диссертаціи, представляемыя въ Казанскій университетъ, и на студентскія работы, представляемыя на соисканіе наградъ; критическія статьи о вновь появляющихся въ Россіи и за границей книгахъ и сочиненіяхъ по всѣмъ отраслямъ знанія; библіографическіе отзывы и замѣтки.

III. Университетская лѣтопись: извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта, отчеты о диспутахъ, статьи, посвященныя обозрѣнію коллекцій и состоянію учебно-вспомогательныхъ учрежденій при университетѣ, біографическіе очерки и некрологи профессоровъ и другихъ лицъ, стоявшихъ близко къ Казанскому университету, обозрѣнія преподаванія, распредѣленія лекцій, актовый отчетъ и проч.

IV. Приложенія: университетскіе курсы профессоровъ и преподавателей; памятники историческіе и литературные съ научными комментаріями и памятники, имѣющіе научное значеніе и еще не обнародованные.

Ученыя Записки выходятъ ежемѣсячно книжками въ размѣрѣ не менѣе 15 листовъ, не считая извлеченій изъ протоколовъ и особыхъ приложеній.

Подписная цѣна въ годъ со всѣми приложеніями **6** руб., съ пересылкою **7** р. Отдѣльныя книжки можно получать въ редакціи по **1** руб. Подписка принимается въ Правленіи университета.

Редакторъ *Ѳ. Мищенко.*

3—3



